

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ της γραφικής παράστασης f .

β) Για κάθε συνάρτηση f για την οποία υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 ,

ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

γ) Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[α,β]$ ισχύουν:

$$f(α) \cdot f(β) < 0 \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (α,β), \text{ τότε η } f \text{ δεν είναι συνεχής στο } [α,β].$$

δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους και δεν είναι παραγωγίσιμες σ' αυτό.

ε) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατο ισχύει: $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$, $x \leq 1$.

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 3x + 2}$

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

B3. Αν $f^{-1}(x) = -x^2 + 2x$ με $x \geq 1$ να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$, όπου $g(x) = \ln x$.

Μονάδες 4

B4. Αν $\varphi(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = -(\ln x)^2 + 2 \ln x$, $x \geq e$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση φ

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ έχει ένα σημείο καμπής που ανήκει στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^3 + \alpha, & x \leq 0 \\ \frac{x - \sin x + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) < \frac{1}{2}x + 1$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f όταν $x \rightarrow +\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f , με τετμημένη $x_0 < 0$, στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f για $x \geq 0$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Μονάδες 5

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|g(x) - g(y)| \leq (x - y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

Μονάδες 5

Δ3. Αν $g(0) = 21$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ με $x \in (-1, +\infty)$ έχει ακριβώς μια θετική και μια αρνητική λύση.

(όπου g η συνάρτηση του ερωτήματος Δ2)

Μονάδες 7

Δ4. Αν $\rho_1 < 0 < \rho_2$ οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοιοι ώστε : $\rho_1 \cdot f'(\xi_1) = \rho_2 \cdot f'(\xi_2)$

Μονάδες 4

β) $0 \leq f(x) < 21$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

Μονάδες 4

Καλή επιτυχία